Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль "Алгебра"

21 Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{10}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{10-4}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	2
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом решение доведено до конца	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

Комментарий. Ошибки в применении формул считаются существенными; при их наличии решение не засчитывается.

22 Один из корней уравнения $5x^2-2x+3p=0$ равен 1. Найдите второй корень.

Решение.

Подставим известный корень в уравнение: $5-2+3p=0$. Получим уравнение относительно p. Решим его: $3p=-3$; $p=-1$. Подставим p в уравнение: $5x^2-2x-3=0$, откуда

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot5\cdot3}}{10}=\frac{2\pm8}{10},\quad x_1=1,\quad x_2=-0,6.$$

Ответ: $-0,6$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	3
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом решение доведено до конца	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	3

23 Найдите наименьшее значение выражения и значения x и y, при которых оно достигается $|6x+y+5|+|3x+2y+1|$.

Решение.

Сумма $|6x+y+5|+|3x+2y+1|$ принимает наименьшее значение, равное 0, только в том случае, когда оба слагаемых одновременно равны 0. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}6x+y+5=0,\\3x+2y+1=0.\end{cases}$$

Решим её

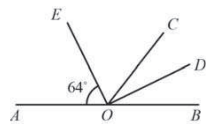
$$\begin{cases}6x+y+5=0,\\6x+4y+2=0,\end{cases}\quad\begin{cases}3y-3=0,\\6x+y+5=0,\end{cases}\quad\begin{cases}y=1,\\6x+6=0,\end{cases}\quad\begin{cases}y=1,\\x=-1.\end{cases}$$

Ответ: 0; (–1;1).

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	4
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом решение доведено до конца	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	4

Модуль "Геометрия"

24 Найдите величину угла DOB, если OE – биссектриса угла AOC, OD – биссектриса угла COB.



Решение.

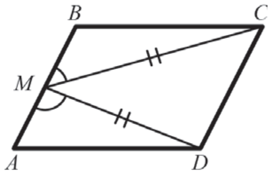
$\angle COA=2\cdot64°=128°$; $\angle BOC=180°-128°=52°$; $\angle DOB=52°:2=26°$.

Ответ: 26°.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение верно, получен верный ответ	2
Допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учетом решение доведено до конца	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

25 В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AB. Известно, что $MC = MD$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

Пусть точка M – середина стороны AB параллелограмма $ABCD$ – равноудалена от его вершин C и D. Тогда, треугольник CMD – равнобедренный, поэтому $\angle MCD = \angle MDC$. Поскольку прямая CD параллельна стороне AB, то $\angle BMC = \angle MCD$ и $\angle AMD = \angle MDC$ как накрест лежащие. Таким образом, $\triangle BMC = \triangle AMD$ по первому признаку равенства треугольников ($\angle BMC = \angle AMD$, $AM = BM$, $MC = MD$).



Значит, $\angle CBM = \angle DAM$. Их сумма равна $180°$, т.к. это два угла параллелограмма, прилежащие к одной стороне. Следовательно, $\angle CBM = \angle DAM = 90°$. По свойству параллелограмма углы BCD и CDA также прямые. Значит, $ABCD$ – прямоугольник.

Комментарий: Равенство треугольников BMC и AMD может быть доказано иначе, например, по третьему признаку равенства треугольников.

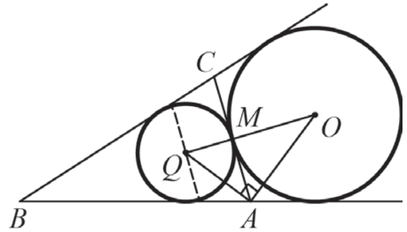
Другое возможное доказательство:

Пусть точка O – середина CD. Четырехугольник $OMBC$ является параллелограммом, поскольку его стороны OC и MB параллельны и равны. Треугольник MCD – равнобедренный, поэтому OM – его высота. Значит, $OMBC$– прямоугольник, следовательно, угол CBM – прямой.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Доказательство содержит неточности или пробелы, например, отсутствуют ссылки на свойства параллельных прямых или параллелограмма	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	3

26 Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.



Данная окружность касается стороны AC в её середине M и продолжений сторон BA и BC треугольника ABC.

Пусть O — центр этой окружности, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Угол OAQ – прямой как угол между биссектрисами смежных углов. Треугольник OAQ – прямоугольный, AM – его высота. Из этого треугольника находим, что $AM^2 = MQ \cdot MO$. Следовательно, $QM = \dfrac{AM^2}{OM} = \dfrac{9}{2} = 4,5$.

Ответ: 4, 5.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль "Алгебра"

21 Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{\sqrt{15}+3}\cdot\sqrt{\sqrt{15}-3}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{\sqrt{15}+3}\cdot\sqrt{\sqrt{15}-3}}=\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{(\sqrt{15}+3)(\sqrt{15}-3)}}=\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{15-9}}=\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}=\sqrt{9}=3.$$

Ответ: 3.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	2
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом решение доведено до конца	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

Комментарий. Ошибки в применении формул считаются существенными; при их наличии решение не засчитывается.

22 Один из корней уравнения $4x^2-x+3m=0$ равен 1. Найдите второй корень.

Решение.

Подставим известный корень в уравнение: $4-1+3m=0$. Получим уравнение относительно m. Решим его: $3m=-3$; $m=-1$. Подставим m в уравнение: $4x^2-x-3=0$, откуда

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot3\cdot4}}{8}=\frac{1\pm7}{8},\quad x_1=1,\quad x_2=-\frac{3}{4}.$$

Ответ: $-\frac{3}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	3
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом решение доведено до конца	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	3

23 Найдите наименьшее значение выражения и значения x и y, при которых оно достигается: $|3x+4y-1|+|x-5y+6|$.

Решение.

Сумма $|3x+4y-1|+|x-5y+6|$ принимает наименьшее значение, равное 0, только в том случае, когда оба слагаемых одновременно равны 0. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}3x+4y-1=0,\\x-5y+6=0.\end{cases}$$

Решим её

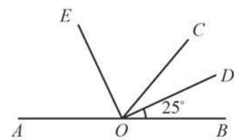
$$\begin{cases}3x+4y-1=0,\\3x-15y+18=0;\end{cases}\quad\begin{cases}19y-19=0,\\x-5y+6=0;\end{cases}\quad\begin{cases}y=1,\\x=-1.\end{cases}$$

Ответ: 0; (–1;1).

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	4
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом решение доведено до конца	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	4

Модуль "Геометрия"

24 Найдите величину угла AOE, если OE – биссектриса угла AOC, OD – биссектриса угла COB.



Решение.

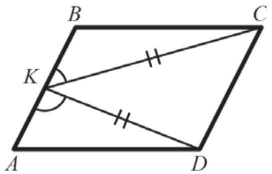
$\angle COB=2\cdot25°=50°$; $\angle AOC=180°–50°=130°$; $\angle AOE=130°:2=65°$.

Ответ: 65°.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение верно, получен верный ответ	2
Допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учетом решение доведено до конца	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

25 В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны AB. Известно, что $KC = KD$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

Пусть точка K – середина стороны AB параллелограмма $ABCD$ – равноудалена от его вершин C и D. Тогда, треугольник CKD – равнобедренный, поэтому $\angle KCD = \angle KDC$. Поскольку прямая CD параллельна стороне AB, то $\angle BKC = \angle KCD$ и $\angle AKD = \angle KDC$ как накрест лежащие. Таким образом, $\triangle BKC = \triangle AKD$ по первому признаку равенства треугольников ($\angle BKC = \angle AKD$, $AK = BK$, $KC = KD$).



Значит, $\angle CBK = \angle DAK$. Их сумма равна 180°, т.к. это два угла параллелограмма, прилежащие к одной стороне. Следовательно, $\angle CBK = \angle DAK = 90^\circ$. По свойству параллелограмма углы BCD и CDA также прямые. Значит, $ABCD$ – прямоугольник.

Комментарий: Равенство треугольников BKC и AKD может быть доказано иначе, например, по третьему признаку равенства треугольников.

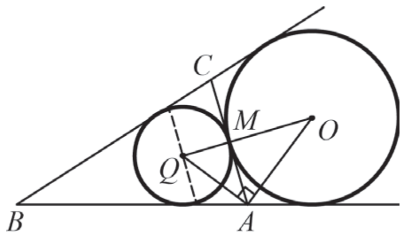
Другое возможное доказательство:

Пусть точка O – середина CD. Четырехугольник $OKBC$ является параллелограммом, поскольку его стороны OC и KB параллельны и равны. Треугольник KCD – равнобедренный, поэтому OK – его высота. Значит, $OKBC$ – прямоугольник, следовательно, угол CBK – прямой.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Доказательство содержит неточности или пробелы, например, отсутствуют ссылки на свойства параллельных прямых или параллелограмма	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	3

26 Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 8. Окружность радиуса 6 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.



Данная окружность касается стороны AC в её середине M и продолжений сторон BA и BC треугольника ABC.

Пусть O – центр этой окружности, а Q – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Угол OAQ – прямой как угол между биссектрисами смежных углов. Треугольник OAQ – прямоугольный, AM – его высота. Из этого треугольника находим, что $AM^2 = MQ \cdot MO$. Следовательно, $QM = \dfrac{AM^2}{OM} = \dfrac{8}{3}$.

Ответ: $\dfrac{8}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль "Алгебра"

21 Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{\sqrt{15}-3}\cdot\sqrt{\sqrt{15}+3}}{\sqrt{24}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{15}-3}\cdot\sqrt{\sqrt{15}+3}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{15}-3)(\sqrt{15}+3)}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{15-9}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	2
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом решение доведено до конца	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

Комментарий. Ошибки в применении формул считаются существенными; при их наличии решение не засчитывается.

22 Один из корней уравнения $5x^2+7x+2m=0$ равен –1. Найдите второй корень.

Решение.

Подставим известный корень в уравнение: $5-7+2m=0$. Получим уравнение относительно m. Решим его: $2m=2$; $m=1$. Подставим m в уравнение: $5x^2+7x+2=0$, откуда

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot5\cdot2}}{10}=\frac{-7\pm3}{10},\quad x_1=-1,\quad x_2=-0,4.$$

Ответ: $-0,4$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	3
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом решение доведено до конца	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	3

23 Найдите наименьшее значение выражения и значения x и y, при которых оно достигается $|6x+5y+7|+|2x+3y+1|$.

Решение.

Сумма $|6x+5y+7|+|2x+3y+1|$ принимает наименьшее значение, равное 0, только в том случае, когда оба слагаемых одновременно равны 0. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}6x+5y+7=0,\\2x+3y+1=0.\end{cases}$$

Решим её:

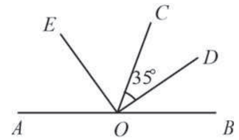
$$\begin{cases}6x+5y+7=0,\\6x+9y+3=0;\end{cases}\quad\begin{cases}4y-4=0,\\6x+9y+3=0;\end{cases}\quad\begin{cases}y=1,\\6x+12=0;\end{cases}\quad\begin{cases}y=1,\\x=-2.\end{cases}$$

Ответ: 0; (–2;1).

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	4
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом решение доведено до конца	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	4

Модуль "Геометрия"

24 Найдите величину угла COE, если OE – биссектриса угла AOC, OD – биссектриса угла COB.



Решение.

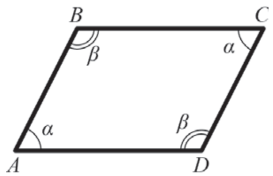
$\angle COB$=2·35°=70°; $\angle AOC$=180°–70°=110°; $\angle COE$=110°:2=55°.

Ответ: 55°.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение верно, получен верный ответ	2
Допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учетом решение доведено до конца	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

25 Противоположные углы четырехугольника попарно равны. Докажите, что этот четырехугольник – параллелограмм.

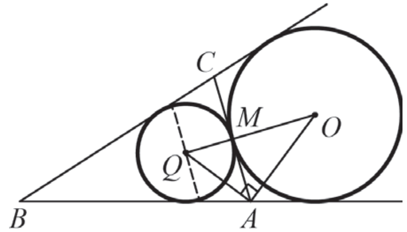
Пусть противоположные углы A и C четырехугольника $ABCD$ равны α, а противоположные углы B и D равны β. Поскольку сумма углов любого четырехугольника равна 360°, то $2\alpha + 2\beta = 360°$. Значит, $\alpha + \beta = 180°$. Так как сумма внутренних односторонних углов при секущей равна $180°$, то по признаку параллельных прямых AB параллельна CD, BC параллельна AD. Значит, четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом по определению.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Доказательство содержит неточности или пробелы, например, отсутствуют ссылки на свойства параллельных прямых или параллелограмма	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	3

26 Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 6. Окружность радиуса 5 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.



Данная окружность касается стороны AC в её середине M и продолжений сторон BA и BC треугольника ABC.

Пусть O — центр этой окружности, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Угол OAQ – прямой как угол между биссектрисами смежных углов. Треугольник OAQ – прямоугольный, AM – его высота. Из этого треугольника находим, что $AM^2 = MQ \cdot MO$. Следовательно, $QM = \dfrac{AM^2}{OM} = \dfrac{9}{5} = 1,8$.

Ответ: $1,8$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль "Алгебра"

21 Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{\sqrt{31}+5}\cdot\sqrt{\sqrt{31}-5}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{\sqrt{31}+5}\cdot\sqrt{\sqrt{31}-5}}=\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{(\sqrt{31}+5)(\sqrt{31}-5)}}=\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{31-25}}=\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}=\sqrt{9}=3.$$

Ответ: 3.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	2
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом решение доведено до конца	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

Комментарий. Ошибки в применении формул считаются существенными; при их наличии решение не засчитывается.

22 Один из корней уравнения $3x^2+5x+2m=0$ равен -1. Найдите второй корень.

Решение.

Подставим известный корень в уравнение: $3-5+2m=0$. Получим уравнение относительно m. Решим его: $2m=2$; $m=1$. Подставим m в уравнение: $3x^2+5x+2=0$, откуда

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot3\cdot2}}{6}=\frac{-5\pm1}{6},\quad x_1=-1,\quad x_2=-\frac{2}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{2}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	3
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом решение доведено до конца	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	3

23 Найдите наименьшее значение выражения и значения x и y, при которых оно достигается: $|3x-4y-2|+|x-5y+3|$.

Решение.

Сумма $|3x-4y-2|+|x-5y+3|$ принимает наименьшее значение, равное 0, только в том случае, когда оба слагаемых одновременно равны 0. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}3x-4y-2=0,\\ x-5y+3=0.\end{cases}$$

Решим её:

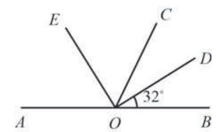
$$\begin{cases}3x-4y-2=0,\\ 3x-15y+9=0,\end{cases}\quad \begin{cases}11y-11=0,\\ x-5y+3=0,\end{cases}\quad \begin{cases}y=1,\\ x=2.\end{cases}$$

Ответ: 0; (2;1).

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	4
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом решение доведено до конца	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	4

Модуль "Геометрия"

24 Найдите величину угла COE, если OE – биссектриса угла AOC, OD – биссектриса угла COB.



Решение.

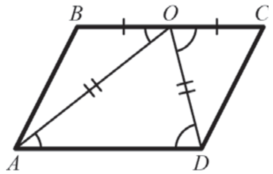
$\angle COB$=2·32°=64°; $\angle AOC$=180°–64°=116°; $\angle COE$=116°:2=58°.

Ответ: 58°.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение верно, получен верный ответ	2
Допущена одна ошибка вычислительного характера или описка, с её учетом решение доведено до конца	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

25 Середина стороны параллелограмма равноудалена от концов его противоположной стороны. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

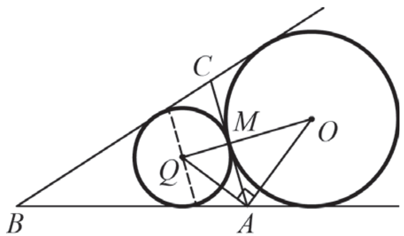
Пусть точка O – середина стороны BC параллелограмма $ABCD$ – равноудалена от его вершин A и D. Тогда треугольник AOD равнобедренный, поэтому $\angle AOD = \angle ODA$. Поскольку прямая ВС параллельна стороне AD, то углы BOA и COD равны указанным углам как накрест лежащие. Таким образом, $\triangle BOA = \triangle COD$ по первому признаку равенства треугольников. Значит, $\angle ABO = \angle ODA$. Пусть их величина равна α. Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\alpha + \alpha = 180°$, т.е. $\alpha = 90°$. По свойству параллелограмма углы BAD и CDA также прямые. Значит, $ABCD$ – прямоугольник.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Доказательство содержит неточности или пробелы, например, отсутствуют ссылки на свойства параллельных прямых или параллелограмма	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	3

26 Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 10. Окружность радиуса 7, 5 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.



Данная окружность касается стороны AC в её середине M и продолжений сторон BA и BC треугольника ABC.

Пусть O — центр этой окружности, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Угол OAQ – прямой как угол между биссектрисами смежных углов. Треугольник OAQ – прямоугольный, AM – его высота. Из этого треугольника находим, что $AM^2 = MQ \cdot MO$. Следовательно, $QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{10}{3}$.

Ответ: $\frac{10}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4