Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21 Решите систему уравнений $\begin{cases} y-5x=-8, \\ y-x^2=-2. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения системы находим $y=5x-8$.

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$5x-8-x^2=-2;\ x^2-5x+6=0,$$

откуда находим $x=2$, $x=3$. Таким образом, решение исходной системы $(2;\ 2), (3;\ 7)$.

Ответ: $(2;\ 2), (3;\ 7)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Система решена верно	2
Верно найдены значения одной переменной, при нахождении соответствующих значений второй переменной допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

22 Расстояние между городами А и В равно 375 км. Город С находится между городами А и В. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 1 час 30 минут следом за ним со скоростью 75 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С.

Решение.

Обозначим скорость (в км/ч) автомобиля за v, а время (в часах), за которое мотоцикл проезжает от А до С за t. Тогда имеем $75t=v\left(t+\frac{3}{2}\right)$, откуда $v=\frac{150t}{2t+3}$. Поскольку весь путь от А до В автомобиль преодолел за время $2t+\frac{3}{2}$, получаем:

$$v\left(2t+\frac{3}{2}\right)=375;\ \frac{150t}{2t+3}\cdot\left(2t+\frac{3}{2}\right)=375;\ 300t^2+225t=750t+1125;\ 4t^2-7t-15=0,$$

откуда $t=3$. Значит, расстояние от А до С равно $75\cdot 3=225$ (км).

Ответ: 225 км.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Задача решена верно	3
Ход решения правильный, составлено верное уравнение или система уравнений, имеется решение уравнения, неверное из-за допущенной ошибки (в частности, при вычислении дискриминанта квадратного уравнения)	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

23 Постройте график функции $y=\frac{x-2}{\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2}$ и найдите все значения k, при которых прямая $y=kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

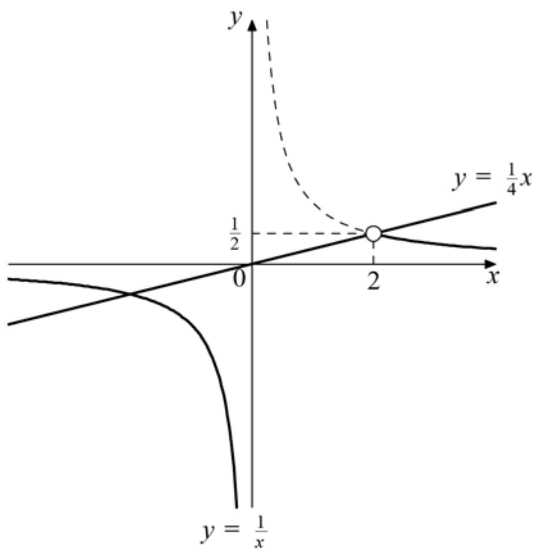
Решение.

Найдём область определения функции:

$$x^2-2x>0;\ x\in(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty).$$

Поскольку $\frac{x-2}{\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2}=\frac{x-2}{x^2-2x}=\frac{1}{x}$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y=\frac{1}{x}$.

График изображён на рисунке.



Прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку при $k \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

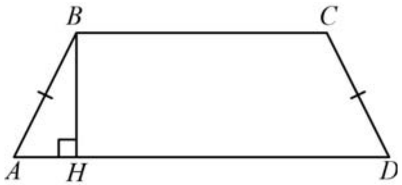
Ответ: $k \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно определена область определения функции, правильно выполнено сокращение дроби, построен график, дан верный ответ на вопрос	4
Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но в ходе решения допущена ошибка/описка вычислительного характера / описка; или допущена ошибка при нахождении области определения функции – один из концов ошибочно включен или исключен; или график построен правильно, ответ на вопрос отсутствует	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Модуль «Геометрия»

24 Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 18, а её периметр равен 52. Найдите площадь трапеции.

Решение.



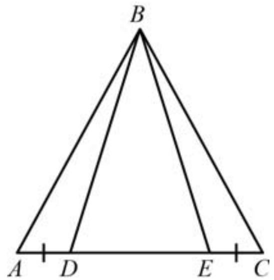
Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 8$ и $AD = 18$, периметр которой равен 52. Имеем $AB = CD = \frac{52 - 8 - 18}{2} = 13$. Пусть BH — высота трапеции. Тогда $AH = \frac{AD - BC}{2} = 5$. Из прямоугольного треугольника ABH находим $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 12$. Значит, площадь трапеции равна $BH \cdot \frac{BC + AD}{2} = 156$.

Ответ: 156.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена вычислительная ошибка/описка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

25 На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. Докажите, что если $BD = BE$, то $AB = BC$.

Доказательство.

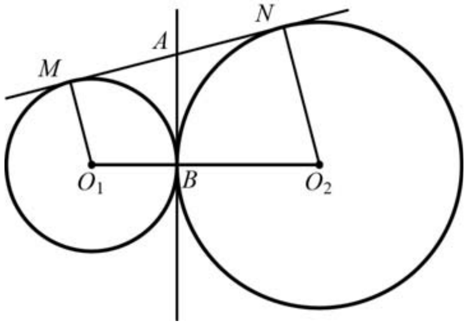


Треугольник DBE — равнобедренный, поэтому $\angle BDE = \angle BED$. Значит, $\angle BDA = \angle BEC$ и треугольники BDA и BEC равны по первому признаку равенства треугольников. Значит, $AB = BC$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Доказательство содержит неточности или пробелы, не влияющие на общий ход рассуждений	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

26 Окружность радиуса 4 касается внешним образом второй окружности в точке B. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку B, пересекается с некоторой другой их общей касательной в точке A. Найдите радиус второй окружности, если $AB = 6$.

Решение.



Обозначим центры первой и второй окружностей O_1 и O_2, а точки касания, с общей касательной, не проходящей через точку B, за M и N. Прямоугольные треугольники AO_1M и AO_1B равны по катету и гипотенузе. Аналогично, равны треугольники AO_2N и AO_2B. Значит, прямые O_1A и O_2A являются биссектрисами углов MO_1B и NO_2B соответственно. Прямые MO_1 и NO_2 параллельны, поэтому сумма углов MO_1B и NO_2B равна $180°$, а сумма углов AO_1B и AO_2B равна $90°$, то есть треугольник O_1O_2A — прямоугольный. Поскольку AB — высота, проведённая к гипотенузе, треугольники AO_1B и AO_2B подобны. Значит, $O_2B = \dfrac{AB^2}{O_1B} = 9$.

Ответ: 9.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	4
Решение доведено до конца, сделан верный рисунок, выбран верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка/описка при нахождении радиуса окружности	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21 Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = -3, \\ 3y - x^2 = -4. \end{cases}$

Решение.
Из первого уравнения системы находим $y = -2x - 3$.
Подставив полученное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$-6x - 9 - x^2 = -4;\ x^2 + 6x + 5 = 0,$$

откуда находим $x = -5$, $x = -1$. Таким образом, решение исходной системы $(-5;\ 7)$, $(-1;\ -1)$.

Ответ: $(-5;\ 7)$, $(-1;\ -1)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Система решена верно	2
Верно найдены значения одной переменной, при нахождении соответствующих значений второй переменной допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

22 Расстояние между городами A и B равно 300 км. Город C находится между городами A и B. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 1 час 30 минут следом за ним со скоростью 60 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C.

Решение.
Обозначим скорость (в км/ч) автомобиля за v, а время (в часах), за которое мотоцикл проезжает от A до C за t. Тогда имеем $60t = v\left(t + \frac{3}{2}\right)$, откуда $v = \frac{120t}{2t+3}$. Поскольку весь путь от A до B автомобиль преодолел за время $2t + \frac{3}{2}$, получаем:

$$v\left(2t + \frac{3}{2}\right) = 300;\ \frac{120t}{2t+3} \cdot \left(2t + \frac{3}{2}\right) = 300;\ 240t^2 + 180t = 600t + 900;\ 4t^2 - 7t - 15 = 0,$$

откуда $t = 3$. Значит, расстояние от A до C равно $60 \cdot 3 = 180$ (км).
Ответ: 180 км.

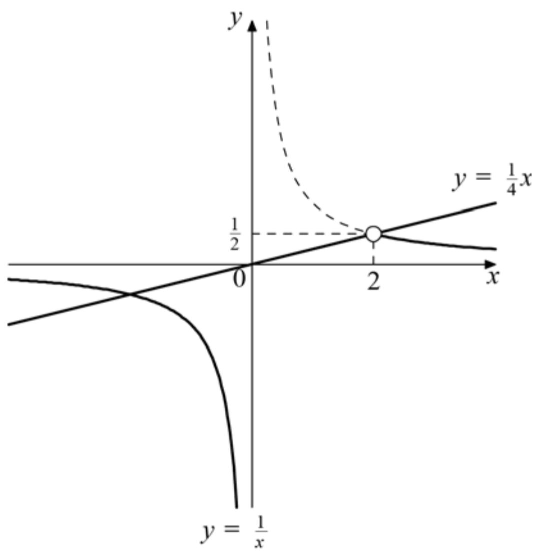
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Задача решена верно	3
Ход решения правильный, составлено верное уравнение или система уравнений, имеется решение уравнения, неверное из-за допущенной ошибки (в частности, при вычислении дискриминанта квадратного уравнения)	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

23 Постройте график функции $y = \frac{x-2}{\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2}$ и найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

Решение.
Найдём область определения функции:

$$x^2 - 2x > 0;\ x \in (-\infty;\ 0) \cup (2;\ +\infty).$$

Поскольку $\frac{x-2}{\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2} = \frac{x-2}{x^2-2x} = \frac{1}{x}$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y = \frac{1}{x}$.
График изображён на рисунке.



Прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку при $k \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

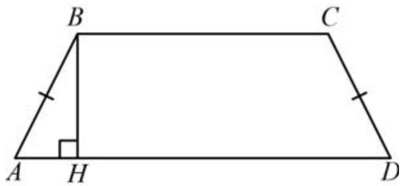
Ответ: $k \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно определена область определения функции, правильно выполнено сокращение дроби, построен график, дан верный ответ на вопрос	4
Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но в ходе решения допущена ошибка/описка вычислительного характера / описка; или допущена ошибка при нахождении области определения функции – один из концов ошибочно включен или исключен; или график построен правильно, ответ на вопрос отсутствует	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Модуль «Геометрия»

24 Основания равнобедренной трапеции равны 12 и 24, а ее периметр равен 56. Найдите площадь трапеции.

Решение.



Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 12$ и $AD = 24$, периметр которой равен 56. Имеем $AB = CD = \frac{56 - 12 - 24}{2} = 10$. Пусть BH — высота трапеции. Тогда $AH = \frac{AD - BC}{2} = 6$. Из прямоугольного треугольника ABH находим $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 8$. Значит, площадь трапеции равна $BH \cdot \frac{BC + AD}{2} = 144$.

Ответ: 144.

Для задания с исходными значениями 9, 21, 50 - решение на странице 4.

24 Основания равнобедренной трапеции равны 9 и 21, а ее периметр равен 50. Найдите площадь трапеции.

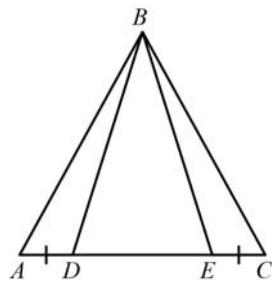
Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 9$ и $AD = 21$, периметр которой равен 50. Имеем $AB = CD = \frac{50 - 9 - 21}{2} = 10$. Пусть BH — высота трапеции. Тогда $AH = \frac{AD - BC}{2} = 6$. Из прямоугольного треугольника ABH находим $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 8$. Значит, площадь трапеции равна $BH \cdot \frac{BC + AD}{2} = 120$.

Ответ: 120.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена вычислительная ошибка/описка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

25 На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. Докажите, что если $AB = BC$, то $BD = BE$.

Доказательство:

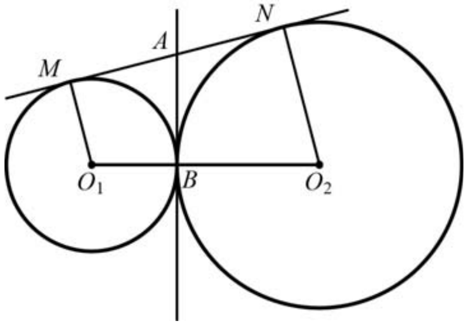


Треугольник ABC — равнобедренный, поэтому $\angle BAC = \angle BCA$. Значит, треугольники BAD и BCE равны по первому признаку равенства треугольников. Значит, $BD = BE$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Доказательство содержит неточности или пробелы, не влияющие на общий ход рассуждений	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

26 Окружность радиуса 4 касается внешним образом второй окружности в точке B. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку B, пересекается с некоторой другой их общей касательной в точке A. Найдите радиус второй окружности, если $AB = 6$.

Решение.



Обозначим центры первой и второй окружностей O_1 и O_2, а точки касания, с общей касательной, не проходящей через точку B, за M и N. Прямоугольные треугольники AO_1M и AO_1B равны по катету и гипотенузе. Аналогично, равны треугольники AO_2N и AO_2B. Значит, прямые O_1A и O_2A являются биссектрисами углов MO_1B и NO_2B соответственно. Прямые MO_1 и NO_2 параллельны, поэтому сумма углов MO_1B и NO_2B равна $180°$, а сумма углов AO_1B и AO_2B равна $90°$, то есть треугольник O_1O_2A — прямоугольный. Поскольку AB — высота, проведённая к гипотенузе, треугольники AO_1B и AO_2B подобны. Значит, $O_2B = \dfrac{AB^2}{O_1B} = 9$.

Ответ: 9.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	4
Решение доведено до конца, сделан верный рисунок, выбран верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка/описка при нахождении радиуса окружности	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21 Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+y=-3, \\ 3y-x^2=-4. \end{cases}$

Решение.
Из первого уравнения системы находим $y=-2x-3$.
Подставив полученное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$-6x-9-x^2=-4;\ x^2+6x+5=0,$$

откуда находим $x=-5$, $x=-1$. Таким образом, решение исходной системы $(-5;\ 7)$, $(-1;\ -1)$.

Ответ: $(-5;\ 7)$, $(-1;\ -1)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Система решена верно	2
Верно найдены значения одной переменной, при нахождении соответствующих значений второй переменной допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

22 Расстояние между городами A и B равно 375 км. Город C находится между городами A и B. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 1 час 30 минут следом за ним со скоростью 75 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C.

Решение.
Обозначим скорость (в км/ч) автомобиля за v, а время (в часах), за которое мотоцикл проезжает от A до C за t. Тогда имеем $75t=v\left(t+\frac{3}{2}\right)$, откуда $v=\frac{150t}{2t+3}$. Поскольку весь путь от A до B автомобиль преодолел за время $2t+\frac{3}{2}$, получаем:

$$v\left(2t+\frac{3}{2}\right)=375;\ \frac{150t}{2t+3}\cdot\left(2t+\frac{3}{2}\right)=375;\ 300t^2+225t=750t+1125;\ 4t^2-7t-15=0,$$

откуда $t=3$. Значит, расстояние от A до C равно $75\cdot 3=225$ (км).

Ответ: 225 км.

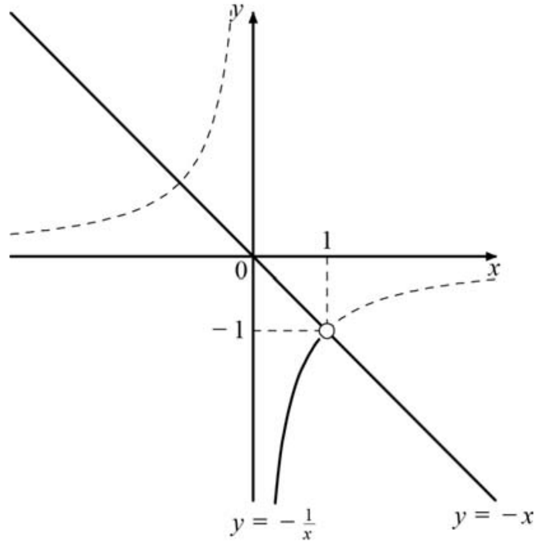
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Задача решена верно	3
Ход решения правильный, составлено верное уравнение или система уравнений, имеется решение уравнения, неверное из-за допущенной ошибки (в частности, при вычислении дискриминанта квадратного уравнения)	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

23 Постройте график функции $y=\frac{x-1}{\left(\sqrt{x-x^2}\right)^2}$ и найдите все значения k, при которых прямая $y=kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

Решение.
Найдём область определения функции: $x-x^2>0;\ x\in(0;\ 1)$.

Поскольку $\frac{x-1}{\left(\sqrt{x-x^2}\right)^2}=\frac{x-1}{x-x^2}=-\frac{1}{x}$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y=-\frac{1}{x}$.

График изображён на рисунке.



Прямая $y=kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку при $k\in(-\infty;\ -1)$.

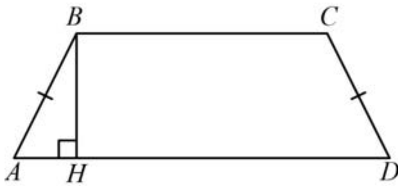
Ответ: $k \in (-\infty; -1)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно определена область определения функции, правильно выполнено сокращение дроби, построен график, дан верный ответ на вопрос	4
Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но в ходе решения допущена ошибка/описка вычислительного характера / описка; или допущена ошибка при нахождении области определения функции – один из концов ошибочно включен или исключен; или график построен правильно, ответ на вопрос отсутствует	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Модуль «Геометрия»

24 Основания равнобедренной трапеции равны 12 и 24, а ее периметр равен 56. Найдите площадь трапеции.

Решение.



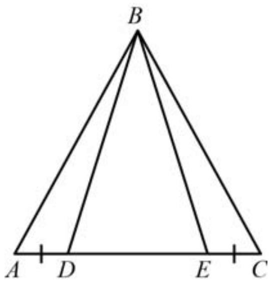
Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 12$ и $AD = 24$, периметр которой равен 56. Имеем $AB = CD = \frac{56-12-24}{2} = 10$. Пусть BH — высота трапеции. Тогда $AH = \frac{AD - BC}{2} = 6$. Из прямоугольного треугольника ABH находим $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 8$. Значит, площадь трапеции равна $BH \cdot \frac{BC + AD}{2} = 144$.

Ответ: 144.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена вычислительная ошибка/описка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

25 На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. Докажите, что если $BD = BE$, то $AB = BC$.

Доказательство.

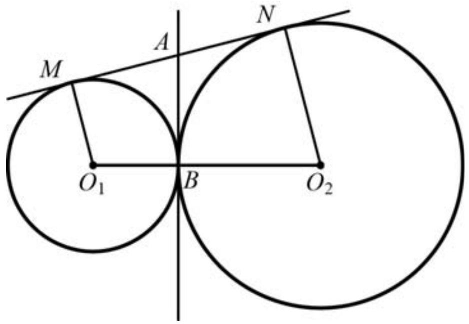


Треугольник DBE — равнобедренный, поэтому $\angle BDE = \angle BED$. Значит, $\angle BDA = \angle BEC$ и треугольники BDA и BEC равны по первому признаку равенства треугольников. Значит, $AB = BC$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Доказательство содержит неточности или пробелы, не влияющие на общий ход рассуждений	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

26 Окружность радиуса 18 касается внешним образом второй окружности в точке B. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку B, пересекается с некоторой другой их общей касательной в точке A. Найдите радиус второй окружности, если $AB = 30$.

Решение.



Обозначим центры первой и второй окружностей O_1 и O_2, а точки касания, с общей касательной, не проходящей через точку B, за M и N. Прямоугольные треугольники AO_1M и AO_1B равны по катету и гипотенузе. Аналогично, равны треугольники AO_2N и AO_2B. Значит, прямые O_1A и O_2A являются биссектрисами углов MO_1B и NO_2B соответственно. Прямые MO_1 и NO_2 параллельны, поэтому сумма углов MO_1B и NO_2B равна $180°$, а сумма углов AO_1B и AO_2B равна $90°$, то есть треугольник O_1O_2A — прямоугольный. Поскольку AB — высота, проведённая к гипотенузе, треугольники AO_1B и AO_1B подобны. Значит, $O_2B = \dfrac{AB^2}{O_1B} = 50$.

Ответ: 50.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	4
Решение доведено до конца, сделан верный рисунок, выбран верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка/описка при нахождении радиуса окружности	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21 Решите систему уравнений $\begin{cases} y-5x=-8, \\ y-x^2=-2. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения системы находим $y=5x-8$.

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$5x-8-x^2=-2;\ x^2-5x+6=0,$$

откуда находим $x=2$, $x=3$. Таким образом, решение исходной системы $(2;\ 2)$, $(3;\ 7)$.

Ответ: $(2;\ 2)$, $(3;\ 7)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Система решена верно	2
Верно найдены значения одной переменной, при нахождении соответствующих значений второй переменной допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

22 Расстояние между городами А и В равно 300 км. Город С находится между городами А и В. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 1 час 30 минут следом за ним со скоростью 60 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С.

Решение.

Обозначим скорость (в км/ч) автомобиля за v, а время (в часах), за которое мотоцикл проезжает от А до С за t. Тогда имеем $60t=v\left(t+\dfrac{3}{2}\right)$, откуда $v=\dfrac{120t}{2t+3}$. Поскольку весь путь от А до В автомобиль преодолел за время $2t+\dfrac{3}{2}$, получаем:

$$v\left(2t+\frac{3}{2}\right)=300;\ \frac{120t}{2t+3}\cdot\left(2t+\frac{3}{2}\right)=300;\ 240t^2+180t=600t+900;\ 4t^2-7t-15=0,$$

откуда $t=3$. Значит, расстояние от А до С равно $60\cdot 3=180$ (км).

Ответ: 180 км.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Задача решена верно	3
Ход решения правильный, составлено верное уравнение или система уравнений, имеется решение уравнения, неверное из-за допущенной ошибки (в частности, при вычислении дискриминанта квадратного уравнения)	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

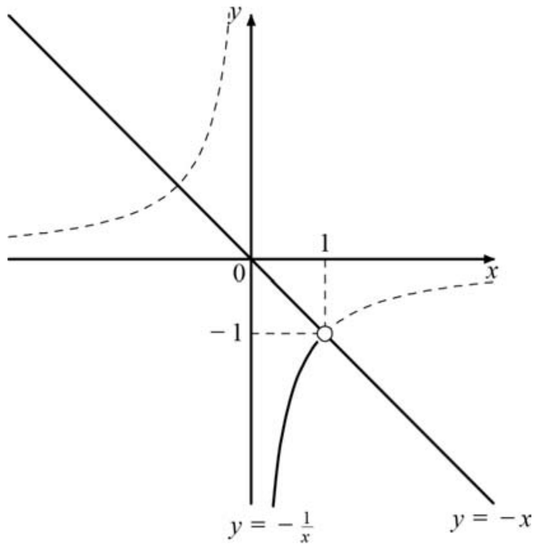
23 Постройте график функции $y=\dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x-x^2}\right)^2}$ и найдите все значения k, при которых прямая $y=kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

Решение.

Найдём область определения функции: $x-x^2>0$; $x\in(0;\ 1)$.

Поскольку $\dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x-x^2}\right)^2}=\dfrac{x-1}{x-x^2}=-\dfrac{1}{x}$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y=-\dfrac{1}{x}$.

График изображён на рисунке.



Прямая $y=kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку при $k\in(-\infty;\ -1)$.

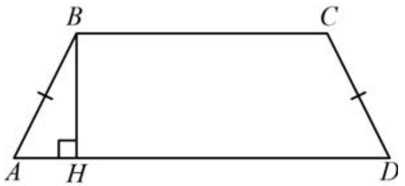
Ответ: $k \in (-\infty; -1)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно определена область определения функции, правильно выполнено сокращение дроби, построен график, дан верный ответ на вопрос	4
Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но в ходе решения допущена ошибка/описка вычислительного характера / описка; или допущена ошибка при нахождении области определения функции – один из концов ошибочно включен или исключен; или график построен правильно, ответ на вопрос отсутствует	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Модуль «Геометрия»

24 Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 18, а её периметр равен 52. Найдите площадь трапеции.

Решение.



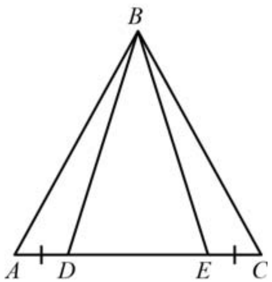
Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 8$ и $AD = 18$, периметр которой равен 52. Имеем $AB = CD = \frac{52-8-18}{2} = 13$. Пусть BH — высота трапеции. Тогда $AH = \frac{AD - BC}{2} = 5$. Из прямоугольного треугольника ABH находим $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 12$. Значит, площадь трапеции равна $BH \cdot \frac{BC + AD}{2} = 156$.

Ответ: 156.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена вычислительная ошибка/описка, возможно, приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

25 На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. Докажите, что если $AB = BC$, то $BD = BE$.

Доказательство:

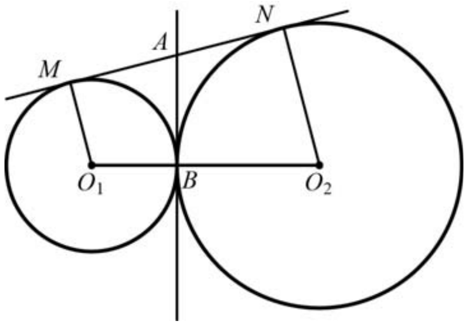


Треугольник ABC — равнобедренный, поэтому $\angle BAC = \angle BCA$. Значит, треугольники BAD и BCE равны по первому признаку равенства треугольников. Значит, $BD = BE$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Доказательство содержит неточности или пробелы, не влияющие на общий ход рассуждений	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	3

26 Окружность радиуса 18 касается внешним образом второй окружности в точке B. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку B, пересекается с некоторой другой их общей касательной в точке A. Найдите радиус второй окружности, если $AB = 30$.

Решение.



Обозначим центры первой и второй окружностей O_1 и O_2, а точки касания, с общей касательной, не проходящей через точку B, за M и N. Прямоугольные треугольники AO_1M и AO_1B равны по катету и гипотенузе. Аналогично, равны треугольники AO_2N и AO_2B. Значит, прямые O_1A и O_2A являются биссектрисами углов MO_1B и NO_2B соответственно. Прямые MO_1 и NO_2 параллельны, поэтому сумма углов MO_1B и NO_2B равна $180°$, а сумма углов AO_1B и AO_2B равна $90°$, то есть треугольник O_1O_2A — прямоугольный. Поскольку AB — высота, проведённая к гипотенузе, треугольники AO_1B и AO_2B подобны. Значит, $O_2B = \dfrac{AB^2}{O_1B} = 50$.

Ответ: 50.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	4
Решение доведено до конца, сделан верный рисунок, выбран верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка/описка при нахождении радиуса окружности	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4