Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$.

Решение.

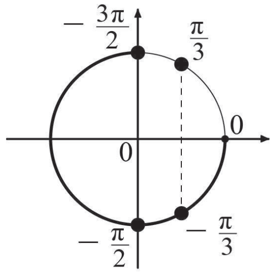
а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x=\cos x;$$

$$\cos x\cdot(2\cos x-1)=0;\quad \cos x=0 \text{ или } \cos x=\frac{1}{2};$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\ \text{или}\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$: $x=-\frac{3\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{3}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено, или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $\sqrt{3}$, а ребро основания равно 4. Точка D — середина ребра BB_1. Найдите объём пятигранника $A_1B_1C_1CD$.

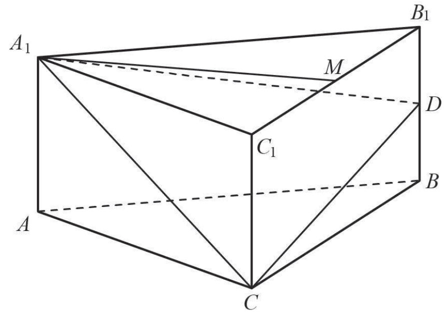
Решение.

Пусть A_1M — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда $A_1M\perp BCC_1$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, поскольку в правильной призме $CC_1\perp A_1B_1C_1$ и, значит, $A_1M\perp CC_1$. Пятигранник $A_1B_1C_1CD$ — четырёхугольная пирамида с вершиной в точке A_1 и основанием DB_1C_1C — прямоугольной трапецией.

Высота пирамиды $A_1M=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$. Площадь основания равна

$$\frac{CC_1+B_1D}{2}\cdot B_1C_1=\frac{\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}\cdot 4=3\sqrt{3},$$

$$V=\frac{1}{3}S_{DB_1C_1C}\cdot A_1M=\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=6.$$



Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, но получен неверный ответ в результате вычислительной ошибки, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств $\begin{cases} |x+2|-x|x| \le 0, \\ \left(x^2-x-6\right)\cdot\sqrt{8-x} \le 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство $|x+2|-x|x| \le 0$. При любом $x \le 0$ неравенство $|x+2|-x|x| \le 0$ не выполняется. При $x > 0$ неравенство равносильно неравенству $x^2-x-2 \ge 0$, решением которого с учётом условия $x > 0$ является луч $x \ge 2$.

Число 8 – решение второго неравенства, и при $x > 8$ решений нет.

Пусть $x < 8$. Тогда $\sqrt{8-x} > 0$, и второе неравенство равносильно неравенству $x^2-x-6 \le 0$. Решим систему:

$$\begin{cases} x < 8, \\ x^2-x-6 \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 8, \\ -2 \le x \le 3; \end{cases} \quad -2 \le x \le 3.$$

Таким образом, решением второго неравенства являются отрезок $-2 \le x \le 3$ и точка $x = 8$.

Следовательно, решением данной системы являются отрезок $2 \le x \le 3$ и точка $x = 8$.

Ответ: $[2;3]$, 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина C, на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 16$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Решение.

Пусть CH — высота треугольника ABC, r и Q — радиус и центр вписанной окружности, $CH = 6$, $AH = 8$, поэтому $AC = 10$. Найдем площадь, полупериметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC:

$$S = \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{6 \cdot 16}{2} = 48, \qquad p = \frac{1}{2}(AC + AB + CB) = AC + AH = 18.$$

Тогда $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{8}{3}$. Кроме того, по теореме Пифагора

$$AQ = \sqrt{AH^2 + QH^2} = \sqrt{64 + \frac{64}{9}} = \frac{8\sqrt{10}}{3}.$$

Пусть окружность с центром в точке O касается боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC и данных параллельных прямых. Радиус этой окружности равен 3, поскольку он вдвое меньше расстояния между прямыми. Точку касания окружности с прямой AB обозначим M.

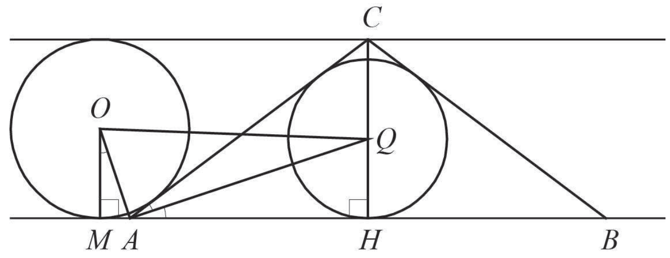


Рис.1

Пусть точки B и M лежат по разные стороны от точки A (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO и AQ — биссектрисы смежных углов $\angle MAC$ и $\angle CAB$ соответственно. Значит, $\angle OAQ = 90°$, и $\angle MOA = \angle QAH$, поскольку эти углы образованы парами соответственно перпендикулярных прямых. Следовательно, прямоугольные треугольники OMA и AHQ подобны с коэффициентом $\dfrac{OM}{AH} = \dfrac{3}{8}$. Поэтому

$$OQ = \sqrt{OA^2 + AQ^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{8}AQ\right)^2 + AQ^2} = \sqrt{\frac{9}{64} + 1} \cdot AQ = \frac{\sqrt{73}}{8} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{730}}{3}.$$

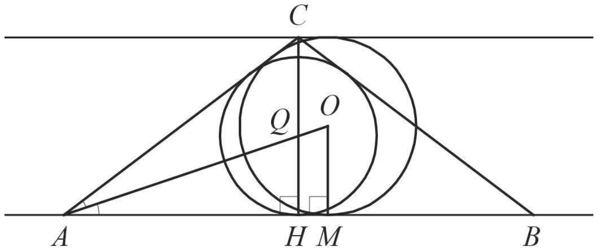


Рис. 2

Пусть точки B и M лежат по одну сторону от точки A (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому лучи AO и AQ совпадают и являются биссектрисой угла MAC. Значит, прямоугольные треугольники AOM и AQH подобны с коэффициентом $\frac{OM}{QH} = \frac{3}{\frac{8}{3}} = \frac{9}{8}$. Тогда

$$OQ = AO - AQ = \frac{9}{8}AQ - AQ = \frac{1}{8}AQ = \frac{1}{8} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{730}}{3}$; $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены оба случая, и получен правильный ответ	3
Рассмотрен хотя бы один случай, для которого получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрен хотя бы один случай, для которого получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sqrt{3}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

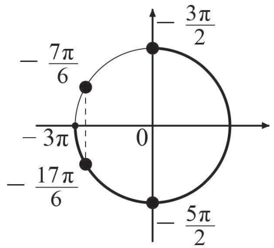
а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x = -\sqrt{3}\cos x;\ 2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0;$$

$$\cos x \cdot (2\cos x + \sqrt{3}) = 0;\ \cos x = 0 \text{ или } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$: $x = -\frac{17\pi}{6}$, $x = -\frac{5\pi}{2}$, $x = -\frac{3\pi}{2}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено, или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

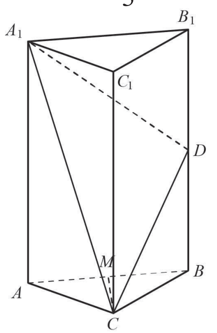
C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $8\sqrt{3}$, а ребро основания равно 1. Точка D — середина ребра BB_1. Найдите объём пятигранника $ABCA_1D$.

Решение.

Пусть CM — высота треугольника ABC. Тогда $CM \perp ABB_1$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, поскольку в правильной призме $AA_1 \perp ABC$ и, значит, $CM \perp AA_1$. Пятигранник $ABCA_1D$ — четырёхугольная пирамида с вершиной в точке C и основанием $ABDA_1$ — прямоугольной трапецией. Высота пирамиды $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Площадь основания равна

$$\frac{AA_1 + BD}{2} \cdot AB = \frac{8\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABDA_1} \cdot CM = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$



Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Ход решения верный, но получен неверный ответ в результате вычислительной ошибки, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств $\begin{cases} (x-3)\,|x-3| - |x-1| \geq 0, \\ \left(x^2 - 7x + 6\right) \cdot \sqrt{11 - x} \leq 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство $(x-3)\,|x-3| - |x-1| \geq 0$. При любом $x \leq 3$ неравенство $(x-3)\,|x-3| - |x-1| \geq 0$ не выполняется. При $x > 3$ неравенство равносильно неравенству $x^2 - 7x + 10 \geq 0$, решением которого с учётом условия $x > 3$ является луч $x \geq 5$.

Число 11 – решение второго неравенства, и при $x > 11$ решений нет.

Пусть $x < 11$. Тогда $\sqrt{11 - x} > 0$, и второе неравенство равносильно неравенству $x^2 - 7x + 6 \leq 0$. Решим систему:

$$\begin{cases} x < 11, \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 11, \\ 1 \leq x \leq 6; \end{cases} \quad 1 \leq x \leq 6.$$

Таким образом, решением второго неравенства являются отрезок $1 \leq x \leq 6$ и точка $x = 11$.

Следовательно, решением данной системы являются отрезок $5 \leq x \leq 6$ и точка $x = 11$.

Ответ: [5; 6], 11.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Решение.

Пусть CH — высота треугольника ABC, r и Q — радиус и центр вписанной окружности, $CH = 12$, $AH = 5$, поэтому $AC = 13$. Найдем площадь, полупериметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC:

$$S = \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{12 \cdot 10}{2} = 60, \qquad p = \frac{1}{2}(AC + AB + CB) = AC + AH = 18.$$

Тогда $r = \frac{S}{p} = \frac{10}{3}$. Кроме того, по теореме Пифагора

$$AQ = \sqrt{AH^2 + QH^2} = \sqrt{25 + \frac{100}{9}} = \frac{5\sqrt{13}}{3}.$$

Пусть окружность с центром в точке O касается боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC и данных параллельных прямых. Радиус этой окружности равен 6, поскольку он вдвое меньше расстояния между прямыми. Точку касания окружности с прямой AB обозначим M.

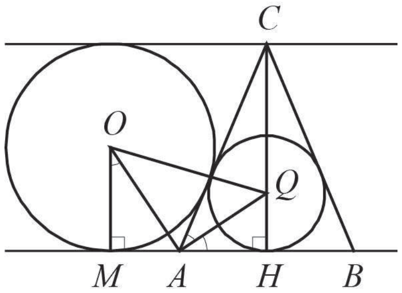


Рис. 1

Пусть точки B и M лежат по разные стороны от точки A (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO и AQ — биссектрисы смежных углов $\angle MAC$ и $\angle CAB$ соответственно. Значит, $\angle OAQ = 90°$, и $\angle MOA = \angle QAH$, поскольку эти углы образованы парами соответственно перпендикулярных прямых. Следовательно, прямоугольные треугольники OMA и AHQ подобны с коэффициентом $\frac{OM}{AH} = \frac{6}{5}$. Поэтому

$$OQ = \sqrt{OA^2 + AQ^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{5}AQ\right)^2 + AQ^2} = \sqrt{\frac{36}{25} + 1} \cdot AQ = \frac{\sqrt{61}}{5} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{3} = \frac{\sqrt{793}}{3}.$$

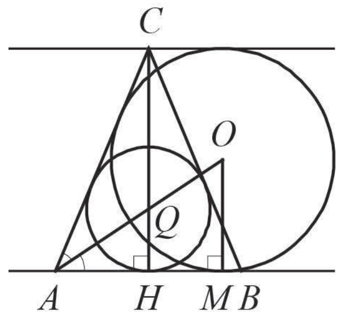


Рис. 2

Пусть точки B и M лежат по одну сторону от точки A (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому лучи AO и AQ совпадают и являются биссектрисой угла MAC. Значит, прямоугольные треугольники AOM и AQH подобны с коэффициентом $\frac{OM}{QH} = \frac{6}{\frac{10}{3}} = \frac{9}{5}$. Тогда

$$OQ = AO - AQ = \frac{9}{5}AQ - AQ = \frac{4}{5}AQ = \frac{4}{5} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{3} = \frac{4\sqrt{13}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{793}}{3}$; $\frac{4\sqrt{13}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены оба случая, и получен правильный ответ	3
Рассмотрен хотя бы один случай, для которого получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрен хотя бы один случай, для которого получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	22,7
B2	-2
B3	17
B4	1764
B5	-7
B6	0,4
B7	24

№ задания	Ответ
B8	0,25
B9	6,5
B10	0,5
B11	8
B12	2
B13	16
B14	-2

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	590
B2	465
B3	8
B4	342
B5	13
B6	0,5
B7	-5

№ задания	Ответ
B8	9
B9	60
B10	0,5
B11	9
B12	4
B13	15
B14	-3