Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

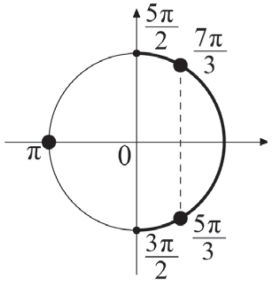
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x - 1 = -\cos x;\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Значит, либо $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$: $x = \frac{5\pi}{3}$; $x = \frac{7\pi}{3}$.



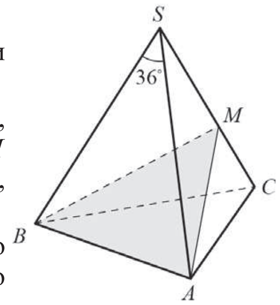
Ответ: а) $-\pi + 2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью оценок, графика, решения двойных неравенств и т.п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено, или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC угол ASB равен $36°$. На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC. Площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A, M и B, равна $25\sqrt{3}$. Найдите сторону основания.

Решение.



Нужное сечение — треугольник AMB.

Рассмотрим треугольник ASC. Он равнобедренный, и $\angle SAC = \angle SCA = 72°$. Значит, $\angle MAC = 36°$.

Рассмотрим теперь треугольник CAM. Сумма его углов $180°$, значит, $\angle AMC = 72°$. Следовательно, треугольник CAM равнобедренный, и поэтому $AC = AM$. Аналогично находим, что $BM = BC$.

Таким образом, треугольник AMB равносторонний, и его сторона AB одновременно является стороной основания. По условию составим уравнение $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$, откуда $AB = 10$.

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Показано, что сечением является равносторонний треугольник или что стороны сечения равны сторонам основания	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{2}{0,5x\sqrt{5}-1}+\dfrac{0,5x\sqrt{5}-2}{0,5x\sqrt{5}-3}\ge 2, \\ \left(\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{x-4}{2}\right)^2\le\dfrac{25}{4}. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделав замену $z=0,5x\sqrt{5}$, получаем:

$$\frac{2}{z-1}+\frac{z-2}{z-3}\ge 2;\quad \frac{(z-2)(z-5)}{(z-1)(z-3)}\le 0;\quad 1<z\le 2 \quad \text{или} \quad 3<z\le 5.$$

Обратная замена даёт $\dfrac{2}{\sqrt{5}}<x\le\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ или $\dfrac{6}{\sqrt{5}}<x\le 2\sqrt{5}$.

Решим второе неравенство. Сделав замену $t=\dfrac{x-4}{2}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t}+t\right)^2\le\frac{25}{4};\quad 0,5\le|t|\le 2.$$

Обратная замена даёт: $0\le x\le 3$ или $5\le x\le 8$.

Учитывая, что $0<\dfrac{2}{\sqrt{5}}<\dfrac{4}{\sqrt{5}}<\dfrac{6}{\sqrt{5}}<3<2\sqrt{5}<5$, получаем решение системы:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}<x\le\frac{4}{\sqrt{5}} \quad \text{или} \quad \frac{6}{\sqrt{5}}<x\le 3.$$

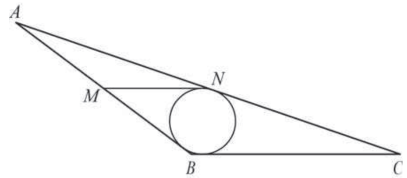
Ответ: $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right],\ \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}};3\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 114, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC=19$. Найдите сторону AB.

Решение.

Обозначим $AB=x$, $AC=y$, пусть p — полупериметр треугольника ABC. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Тогда $MN=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{19}{2}$.



В трапецию $BMNC$ вписана окружность, поэтому

$$BM+CN=BC+MN=19+\frac{19}{2}=\frac{57}{2};$$

значит,

$$x+y=AB+AC=2BM+2CN=2\left(BM+CN\right)=2\left(BC+MN\right)=2\cdot\frac{57}{2}=57,$$

$$p=\frac{AB+AC+BC}{2}=\frac{x+y+19}{2}=\frac{57+19}{2}=38.$$

По формуле Герона

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}=$$
$$=\sqrt{38(38-x)(38-y)(38-19)}=19\sqrt{2(38-x)(38-y)}=114;$$
$$\sqrt{2(38-x)(38-y)}=6;\quad (38-x)(38-y)=18;$$
$$(38-x)(38-57+x)=18;\ x^2-57x+740=0.$$

Отсюда находим, что $x=20$ или $x=37$.

Ответ: 20 или 37.

Содержание критерия	Баллы
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получен правильный ответ	3
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получено одно правильное значение искомой величины	2
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получены одно или оба значения искомой величины, неправильные из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

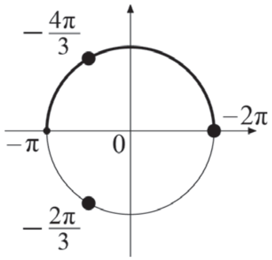
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x - 1 = \cos x;\ 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$: $-2\pi; -\frac{4\pi}{3}$.



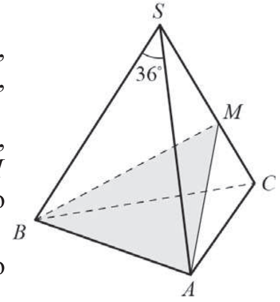
Ответ: а) $2\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi, -\frac{4\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью оценок, графика, решения двойных неравенств и т.п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено, или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна 8, а угол ASB равен 36°. На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A, M и B.

Решение.



Нужное сечение — треугольник AMB.

Рассмотрим треугольник ASC. Он равнобедренный, $\angle ASC = \angle ASB = 36°$, поэтому $\angle SAC = \angle SCA = 72°$. Значит, $\angle MAC = 36°$.

Рассмотрим теперь треугольник CAM. Сумма его углов $180°$, значит, $\angle AMC = 72°$. Следовательно, треугольник CAM равнобедренный, и поэтому $AM = AC = 8$. Аналогично находим, что $BM = 8$.

Таким образом, треугольник AMB равносторонний со стороной 8. Его площадь равна $\frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$.

Ответ: $16\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Показано, что сечением является равносторонний треугольник или что стороны сечения равны сторонам основания	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{6}{x\sqrt{3}-3}+\dfrac{x\sqrt{3}-6}{x\sqrt{3}-9}\ge 2, \\ \left(\dfrac{10}{5x-21}+\dfrac{5x-21}{10}\right)^2 \le \dfrac{25}{4}. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделав замену $z = x\sqrt{3}$, получаем:

$$\frac{6}{z-3}+\frac{z-6}{z-9}\ge 2;\ \frac{(z-6)(z-15)}{(z-9)(z-3)}\le 0;\ 3<z\le 6 \text{ или } 9<z\le 15.$$

Обратная замена даёт: $\sqrt{3}<x\le 2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{3}<x\le 5\sqrt{3}$.

Решим второе неравенство. Сделав замену $t=\dfrac{5x-21}{10}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t}+t\right)^2\le\frac{25}{4};\quad 0,5\le|t|\le 2.$$

Обратная замена даёт: $0,2\le x\le 3,2$ или $5,2\le x\le 8,2$.

Учитывая, что $0,2<\sqrt{3}<3,2<2\sqrt{3}<3\sqrt{3}<5,2<8,2<5\sqrt{3}$, получаем решение системы:

$$\sqrt{3}<x\le 3,2 \text{ или } 5,2\le x\le 8,2.$$

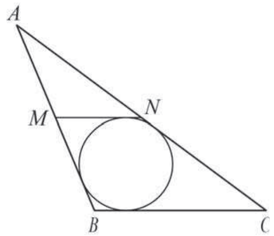
Ответ: $(\sqrt{3};\ 3,2],\quad [5,2;\ 8,2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC = 11$. Найдите сторону AB.

Решение.

Обозначим $AB = x$, $AC = y$, пусть p — полупериметр треугольника ABC. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Тогда $MN=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{11}{2}$.



В трапецию $BMNC$ вписана окружность, поэтому

$$BM+CN=BC+MN=11+\frac{11}{2}=\frac{33}{2},$$

значит,

$$x+y=AB+AC=2BM+2CN=2\left(BM+CN\right)=2\left(BC+MN\right)=2\cdot\frac{33}{2}=33,$$

$$p=\frac{AB+AC+BC}{2}=\frac{x+y+11}{2}=\frac{33+11}{2}=22.$$

По формуле Герона

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}=$$
$$=\sqrt{22(22-x)(22-y)(22-11)}=11\sqrt{2(22-x)(22-y)}=66;$$
$$\sqrt{2(22-x)(22-y)}=6;\ \ (22-x)(22-y)=18;$$
$$(22-x)(22-33+x)=18;\ \ x^2-33x+260=0.$$

Отсюда находим, что $x = 13$ или $x = 20$.

Ответ: 13 или 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получен правильный ответ	3
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получено одно правильное значение искомой величины	2
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получены одно или оба значения искомой величины, неправильные из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	26
B2	0,6
B3	8
B4	19500
B5	6
B6	72,5
B7	25

№ задания	Ответ
B8	3
B9	8
B10	0,4
B11	125
B12	27
B13	7
B14	27

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	891
B2	44,30,6
B3	36
B4	0,78
B5	1
B6	40
B7	-18

№ задания	Ответ
B8	2
B9	210
B10	0,2
B11	3
B12	6000
B13	50
B14	2