Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

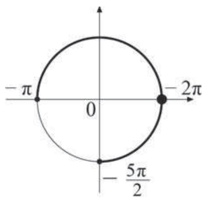
C1 а) Решите уравнение $7\mathrm{tg}^2 x - \dfrac{1}{\cos x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде $\dfrac{7}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\cos x} - 6 = 0$. Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\dfrac{1}{\cos x}$, получим $\dfrac{1}{\cos x} = 1$ или $\dfrac{1}{\cos x} = -\dfrac{6}{7}$. Значит, $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; либо $\cos x = -\dfrac{7}{6}$, что невозможно.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$: $x = -2\pi$.



Ответ: а) $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) -2π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено, или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Замечание. Отбор корней может быть обоснован иначе: с помощью оценок, графика, решения двойных неравенств и т. п.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 5, а сторона основания равна 4.

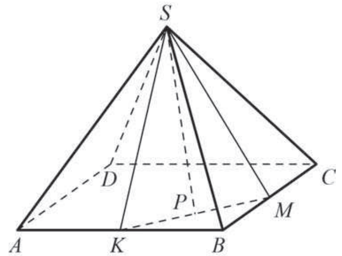
Решение.

Изобразим указанное в условии сечение — треугольник SKM;

$$KM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Проведём в треугольнике SKM высоту SP. Точка P — середина KM.

Значит, $KP = \dfrac{1}{2}KM = \sqrt{2}$.



Из треугольника SKA находим

$$SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}.$$

Из треугольника SPK находим

$$SP = \sqrt{SK^2 - KP^2} = \sqrt{21-2} = \sqrt{19}.$$

Тогда

$$S_{SKM} = \frac{1}{2}KM\cdot SP = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{19} = \sqrt{38}.$$

Ответ: $\sqrt{38}$.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему $\begin{cases} 2^x + 6 \cdot 2^{-x} \le 7, \\ \dfrac{2x^2 - 6x}{x - 4} \le x. \end{cases}$

Решение.
Решим первое неравенство. Сделаем замену $2^x = y$. Поскольку $y > 0$, на него можно умножить обе части неравенства. Получим

$$y + \frac{6}{y} \le 7;\quad y^2 - 7y + 6 \le 0;\quad (y-1)(y-6) \le 0.$$

Значит, $1 \le y \le 6$, откуда $0 \le x \le \log_2 6$.

Решим второе неравенство:

$$\frac{2x^2 - 6x}{x-4} \le \frac{x^2 - 4x}{x-4};\quad \frac{x(x-2)}{x-4} \le 0,\ \text{откуда}\ x \le 0;\quad 2 \le x < 4.$$

Учитывая, что $2 < \log_2 6 < 3$, находим решение системы: $x = 0$ или $2 \le x \le \log_2 6$.

Ответ: $\{0\};\ \left[2;\ \log_2 6\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами KN=13, MN=6. Прямая, проходящая через вершину M, касается окружности с центром K радиуса 3 и пересекается с прямой KN в точке Q. Найдите QK.

Решение.
Пусть точка Q лежит между K и N (рис. 1), P – точка касания прямой MQ с данной окружностью. Обозначим $KQ = x$.

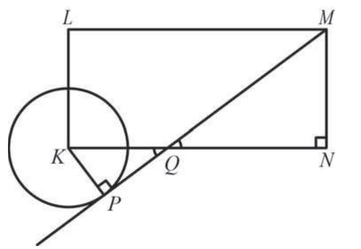


Рис. 1

Из прямоугольного треугольника QPK по теореме Пифагора находим

$$PQ = \sqrt{QK^2 - PK^2} = \sqrt{x^2 - 9}.$$

Прямоугольные треугольники QPK и QNM подобны по двум углам, поэтому $\dfrac{PK}{PQ} = \dfrac{MN}{QN}$, откуда

$$\frac{3}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{6}{13 - x};$$

$$(13 - x)^2 = 4\left(x^2 - 9\right);\quad 3x^2 + 26x - 205 = 0;\quad x = 5.$$

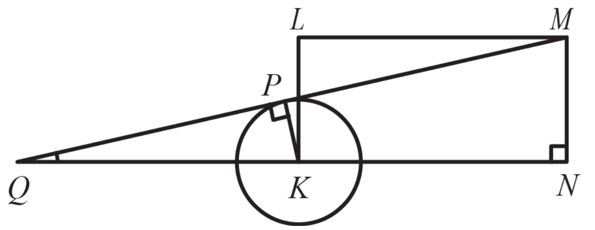


Рис. 2

Если точка Q лежит на продолжении стороны NK за точку K (рис. 2), то, рассуждая аналогично, получим уравнение $3x^2 - 26x - 205 = 0$, из которого $x = \dfrac{41}{3}$.

Ответ: 5 или $\dfrac{41}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

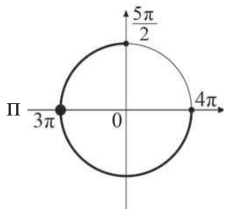
C1 а) Решите уравнение $4\mathrm{tg}^2 x + \dfrac{3}{\cos x} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде $\dfrac{4}{\cos^2 x} + \dfrac{3}{\cos x} - 1 = 0$. Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\dfrac{1}{\cos x}$, получим $\dfrac{1}{\cos x} = -1$ или $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{4}$. Значит, $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;либо $\cos x = 4$, что невозможно.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$: $x = 3\pi$.



Ответ: а) $\pi n + \pi,\ n \in \mathbb{Z}$; б) 3π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Замечание. Отбор корней может быть обоснован иначе: с помощью оценок, графика, решения двойных неравенств и т. п.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если все рёбра пирамиды равны 8.

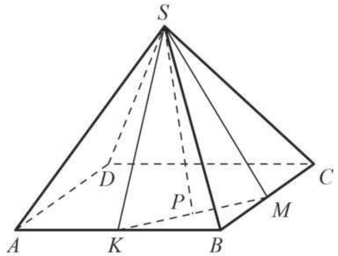
Решение.

Изобразим указанное в условии сечение — треугольник SKM;

$$KM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

Проведём в треугольнике SKM высоту SP. Точка P — середина KM.

Значит, $KP = \dfrac{1}{2}KM = 2\sqrt{2}$.



Из треугольника SKA находим

$$SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48}.$$

Из треугольника SPK находим

$$SP = \sqrt{SK^2 - KP^2} = \sqrt{48 - 8} = 2\sqrt{10}.$$

Тогда

$$S_{SKM} = \frac{1}{2}KM \cdot SP = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{10} = 8\sqrt{5}.$$

Ответ: $8\sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему $\begin{cases} 3^x + 10 \cdot 3^{-x} \le 11, \\ \dfrac{2x^2 - 5x}{x-3} \le x. \end{cases}$

Решение.
Решим первое неравенство. Сделаем замену $3^x = y$. Поскольку $y > 0$, на него можно умножить обе части неравенства. Получим

$$y + \frac{10}{y} \le 11; \quad y^2 - 11y + 10 \le 0; \quad (y-1)(y-10) \le 0.$$

Значит, $1 \le y \le 10$, откуда $0 \le x \le \log_3 10$.

Решим второе неравенство:

$$\frac{2x^2 - 5x}{x-3} \le \frac{x^2 - 3x}{x-3}; \quad \frac{x(x-2)}{x-3} \le 0, \quad \text{откуда } x \le 0; \quad 2 \le x < 3.$$

Учитывая, что $2 < \log_3 10 < 3$, находим решение системы: $x = 0$ или $2 \le x \le \log_3 10$.

Ответ: $\{0\}; \left[2;\ \log_3 10\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами KN=11, MN=8. Прямая, проходящая через вершину M, касается окружности с центром K радиуса 4 и пересекается с прямой KN в точке Q. Найдите QK.

Решение.
Пусть точка Q лежит между K и N (рис.1), P – точка касания прямой MQ с данной окружностью. Обозначим $KQ = x$.

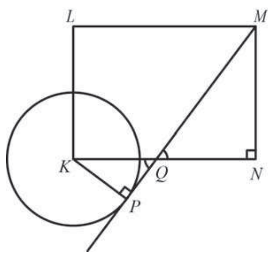


Рис.1

Из прямоугольного треугольника QPK по теореме Пифагора находим

$$PQ = \sqrt{QK^2 - PK^2} = \sqrt{x^2 - 16}.$$

Прямоугольные треугольники QPK и QNM подобны, поэтому $\dfrac{PK}{PQ} = \dfrac{MN}{QN}$, откуда

$$\frac{4}{\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{8}{11 - x};$$

$$(11 - x)^2 = 4(x^2 - 16); \quad 3x^2 + 22x - 185 = 0; \quad x = 5.$$

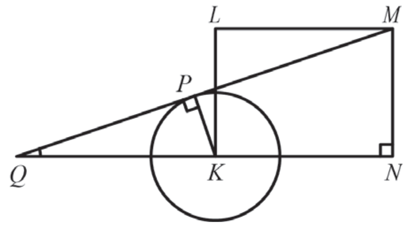


Рис.2

Если точка Q лежит на продолжении стороны NK за точку K (рис.2), то, рассуждая аналогично, получим уравнение $3x^2 - 22x - 185 = 0$, из которого $x = \dfrac{37}{3}$.

Ответ: 5 или $\dfrac{37}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Ответы к заданиям с кратким ответом

Вариант 3

№ задания	Ответ
B1.	180
B2	35,9
B3.	10
B4.	21
B5.	-11
B6	36
B7	6

№ задания	Ответ
B8.	8
B9.	12
B10	0,4
B11.	5
B12.	7000
B13	25
B14.	16

Ответы к заданиям с кратким ответом

Вариант 4

№ задания	Ответ
B1.	32,4
B2	31,1
B3	28
B4.	34
B5	-3
B6.	48
B7	8

№ задания	Ответ
B8	12
B9	4
B10	0,8
B11	8
B12	25
B13	100
B14	8